

Φύλλαδιο 1 - Άσκηση 10

- i) n : περιττός $\Rightarrow 11/10^n + 1$
ii) n : άρτιος $\Rightarrow 11/10^n - 1$
iii) $a = a_0 + a_1 \cdot 10 + \dots + a_m \cdot 10^m$ τότε $11/a \Leftrightarrow 11/a^* = a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^m a_m$
όπου $m \geq 1$ & $0 \leq a_i \leq 9$ $\forall i = 0, \dots, m$

Παρατήρηση: $a = a_0 a_1 a_2 \dots a_m$

Λύση

- i) Επειδή n : περιττός $\Rightarrow n = 2k+1$, όπου $k \geq 0$ τότε $10^n + 1 = 10^{2k+1} + 1$

- Για $k=0$: $10^{2k+1} + 1 = 10^1 + 1 = 11$ και προφανώς $11/10^{2 \cdot 0 + 1} + 1$
- Για $k=1$: $10^{2k+1} + 1 = 10^{2 \cdot 1 + 1} + 1 = 10^3 + 1 = 1001$ & $11/10^{2 \cdot 1 + 1}$
ναί $1001 = 11 \cdot 91$
- Θέλωμε $P(k) = 11/10^{2k+1}$

Τότε η $P(k)$ ισχύει για $k=0, 1$

Υποθέτουμε ότι ισχύει η $P(k)$ τότε:

$$10^{2(k+1)+1} = 10^{2k+3} + 1 = 10^{2k+1+2} + 1 = 10^{2k+1} \cdot 10^2 + 1 =$$

$$= (99+1)10^{2k+1} = 99 \cdot 10^{2k+1} + 10^{2k+1} = 11 \cdot (9 \cdot 10^{2k+1}) + 10^{2k+1} + 1$$

$$\text{Επειδή } \frac{11}{11 \cdot (9 \cdot 10^{2k+1} + 1)} \Rightarrow \frac{11}{11 \cdot (9 \cdot 10^{2k+1}) + 10^{2k+1} + 1} =$$
$$\frac{11}{10^{2(k+1)+1} + 1} (= P(k)) \Rightarrow 10^{2(k+1)+1} + 1 \Rightarrow P(k+1) \text{ αληθής}$$

- ii) Επειδή n : άρτιος $\Rightarrow n = 2 \cdot k$ όπου $k \in \mathbb{N}$. Θέλωμε $P(k): 11/10^n - 1 = 10^{2k} - 1$

- Για $k=1$ τότε: $10^{2 \cdot 1} - 1 = 99 = 9 \cdot 11$ και προφανώς $11/10^{2 \cdot 1} - 1 = 9 \cdot 11$

- Επαγωγική υπόθεση: Η $P(k)$ ισχύει έπει $11/10^{2k} - 1$

- Για την $P(k+1): 11/10^{2(k+1)} - 1$ τότε:

$$10^{2(k+1)} - 1 = 10^{2k+2} - 1 = 10^{2k} \cdot 10^2 - 1 = 100 \cdot (10^{2k} - 1) + (100 - 1) = 99 \cdot 10^{2k} - 1$$

$$= 99 \cdot 10^{2k} - 1 + 10^{2k} = (10^{2k} - 1) + 11 \cdot (9 \cdot 10^{2k})$$

$$\text{Τότε: } \frac{11}{11 \cdot 9 \cdot 10^{2k}} \Rightarrow \frac{11}{11 \cdot 9 \cdot 10^{2k} + 10^{2k} - 1} = 10^{2(k+1)} - 1 \Rightarrow$$
$$11/10^{2k} - 1 (= P(k)) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ η $P(k+1)$ ισχύει $\Rightarrow$

$P(k)$ ισχύει $\forall k \in \mathbb{N}$

Σο (ii) το δύναται με διαδοχικούς ποσά αν' οι ους λύσεις της σελίδας το + αλφάβητος.

$$\text{iii)} \quad 10 = 11 - 1 \quad \text{και τότε: } 10^i = (11 - 1)^i \stackrel{(*)}{=} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} 11^k (-1)^{i-k} \\ = 11 \cdot x_i + (-1)^i$$

$$(*) : (x+y)^i = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} x^k y^{i-k} \quad \text{Άρα: } 10^i = 11 \cdot x_i + (-1)^i, \quad 1 \leq i \leq m$$

$$\text{Τότε } \alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_2 \cdot 10^2 + \dots + \alpha_m \cdot 10^m = \\ = \alpha_0 + \alpha_1 (11 \cdot x_1 + (-1)^1) + \alpha_2 (11 \cdot x_2 + (-1)^2) + \dots + \alpha_m (11 \cdot x_m + (-1)^m) \\ = 11 (\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m) + (\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \dots + (-1)^m)$$

$$\text{Άρα } \alpha = 11 \cdot A + \alpha^* \quad \text{"} \implies \text{"} \quad \alpha^*$$

Έστω ότι $11/\alpha$ Επειδή $\alpha = 11A + \alpha^*$ και $11/11A$ έπεται ότι $11/\alpha - 11A = \alpha^*$, και το αντίστροφο:

$$\left. \begin{array}{l} \text{"} \Leftarrow \text{" αν } 11/\alpha^* \\ 11/11A \end{array} \right\} \Rightarrow 11/\alpha^* + 11A = \alpha$$

(Αντίστροφο ή ισοδυναμία)

Εφαρμογή

(i) $\alpha = 8703585473$ Διακρίνει το 11?

$$\text{Άρα } \alpha^* = 3 - 7 + 4 - 5 + 0 - 5 + 3 - 0 + 7 - 8 = 0$$

$$\text{Επειδή } 11/\alpha^* = 0 \Rightarrow 11/\alpha$$

(ii) $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_2 \cdot 10^2 + \dots + \alpha_m \cdot 10^m$

$$11/\alpha \Leftrightarrow 11/\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \dots + (-1)^m \alpha_m \Leftrightarrow 11/(-1)^m \cdot (\alpha_0 - \alpha_1 + \dots + (-1)^m \alpha_m)$$

$$\Leftrightarrow 11/\alpha_m - \alpha_{m-1} + \dots + (-1)^m \alpha_0 \Leftrightarrow$$

$$11/\beta \quad \text{όπου } \beta = \alpha_m + \alpha_{m-1} \cdot 10 + \dots + \alpha_0 \cdot 10^m \Leftrightarrow 11/\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_m$$

Άσκηση 13 Φύλλαδιο

- Α, P: θετικός ακέραιος $p > 1$ και: $p \mid (p-1)! + 1$ τότε P: πρώτος

Έστω ότι ο p: σύνθετος $\Rightarrow p = \alpha \cdot \beta$ όπου $1 < \alpha, \beta < p$

Τότε $\alpha \leq p-1$ Επειδή $(p-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \alpha \cdot \dots \cdot (p-1)$ έπεται ότι $\alpha \mid (p-1)!$

$$\text{Τότε } \alpha \mid p \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow \alpha \mid (p-1)! + 1 \\ \alpha \mid (p-1)! \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \mid 1 \Rightarrow \alpha = 1 \quad \text{ΑΤΟΠΟ αφού}$$

είναι ότι α πρώτος

Ασκ. 12

Υπάρχουν γενερασμένοι πλήθους πρώτοι αριθμοί της μορφής:

1) $3k+2$

2) $6k+5$

Λύση του 2

(i) Κάθε θετικός ακέραιος $a > 1$ είναι γενερασμένο γινόμενο πρώτων αριθμών

(ii) Κάθε θετικός ακέραιος της μορφής $6k+5$

(iii) Υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής $6k+5$

Λύση

(i) Έστω $a > 1$. Τότε ο a έχει πρώτο διαιρέτη $p_1: a = p_1 \cdot a_1$.

Αν $a_1 = 1$ τότε $a = p_1$.

Αν $a_1 > 1$ τότε όπως και πριν ο a_1 έχει έναν πρώτο διαιρέτη, έστω p_2 . Συνεχίζοντας αυτήν τη διαδικασία και έρχεται

$a_1 = p_2 \cdot a_2$. Τότε $a = p_1 \cdot p_2 \cdot a_2$ θα έχουμε: $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ όπου p_i πρώτοι, $i \leq n$

(ii) Έστω p : οποιονδήποτε πρώτος διαιρέτη του

$a = 6k+5$ όπου $k \geq 0$. Τότε ο p θα έχει μία από

της ακόλουθες μορφές: ~~$6l+1$~~ , ~~$6l+2$~~ , ~~$6l+3$~~ , ~~$6l+4$~~ , $6l+5$

Άρα ο p θα είναι

δεν είναι πρώτοι και δεν αυτοπρίνζονται

της μορφής: $6l+1$ ή $6l+5$

Από το (i) έχω: $a = 6k+5 = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ όπου p_i πρώτος της μορφής

$6l+1$ ή $6l+5$. Έστω ότι όλοι οι πρώτοι $p_1, \dots, p_n$ είναι της μορφής

$6l+1$ δηλ. $p_1 = 6l_1+1$

$\vdots$

$p_n = 6l_n+1$

$$\Rightarrow \text{όπως } (6l+1) \cdot (6h+1) = 6(6lh+1+h+l) = 6[6lh+1+h+l] + 1 \text{ της μορφής } 6k+1$$

Άρα γινόμενο αριθμών της μορφής $6k+1$ είναι της μορφής $6k+1$ και άρα a θα είναι της μορφής $6n+1$. Επειδή $a = 6k+5$ θα έχουμε

$$6n+1, 6k+5 \Rightarrow 6(k-n) = -4 \Rightarrow 3(k-n) = -2 \quad \text{ΑΤΟΛΩ}$$

Άρα τουλάχιστον ένας πρώτος πρώτος διαιρέτης του a είναι της μορφής: $6l+5$

(i) Υποθέτουμε ότι υπάρχει πεπερασμένο πλήθος
 πρώτων της μορφής $6k+5$, έστω ότι αυτοί είναι
 οι $p_1, p_2, \dots, p_n$. Θεωρούμε τον αριθμό $\alpha = 6p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n - 1$
 $= 6p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n - 6 + 5 = 6(p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n - 1) + 5$ είναι της
 μορφής $6k+5$

(ii) $\Rightarrow$ ο α έχει ως άνω έναν πρώτο διαιρέτη
 της μορφής $6k+5$. Επειδή όλοι οι πρώτοι διαιρέτες
 της μορφής $6k+5$ είναι $p_1, \dots, p_n \Rightarrow$
 $\Rightarrow (\exists k=1, \dots, n) : p_k | \alpha$

Από $p_k | \alpha = 6p_1 \cdot \dots \cdot p_n - 1$ $\Rightarrow p_k | 1 \Rightarrow p_k = 1$ ΑΔΩΔ διότι
 $p_k | 6p_1 \cdot \dots \cdot p_k \cdot \dots \cdot p_n$ p_k : πρώτος ≥ 2

Από αυτόν ανέλπει πρώτοι της μορφής $6k+5$

Άσκηση 15

Να βρεθούν όλοι οι αριθμοί $p: p, p+2, p+4$ πρώτοι
 Για $p=3$ τότε $(3, 3+2, 3+4) = (3, 5, 7)$: πρώτοι και άρα
 βρήκαμε μία τέτοια τριάδα.

Θ.δ.ο. είναι και η μοναδική τέτοια τριάδα

Απόδειξη

Έστω p : πρώτος. Τότε ο p δε έχει μία από τις παρακάτω
 μορφές: $p=3k, p=3k+1, p=3k+2$

α) Αν $p=3k$ τότε $k=1$ (διότι p : πρώτος) και τότε:

$$p=3, p+2=5, p+4=7$$

β) Αν $p=3k+1$ τότε $p+2=3k+1+2=3k+3=3(k+1)$

Απορρίπτουμε διότι $p+2$: πρώτος

γ) Αν $p=3k+2$ τότε $p+4=3k+2+4=3k+6=3(k+2)$.

Απορρίπτουμε διότι $p+4$ πρώτος